

Anwendung von FE-basierten Reduktionsmethoden

Integration von flexiblen Bauteilen in der gekoppelten Simulation von Werkzeugmaschinen

Dipl.-Ing. **Pascal Maglie**, ETH, Zürich,

Kurzfassung

Die Entwicklung von immer komplexeren Strukturen verlangt fortgeschrittene Simulationstechniken für Design, Optimierung und Regelung. Die Modelle, die aus der Finite-Elemente-Methode (FEM) resultieren, werden dennoch rechnerisch schnell sehr aufwendig und sind damit für gekoppelte Simulationen nicht mehr anwendbar. Reduktionsverfahren, die auf der FEM basieren, spielen dabei eine unerlässliche Rolle, indem sie ein leistungsfähiges Berechnungswerkzeug zur Verfügung stellen, um ein kompliziertes Modell durch ein kleineres Modell zu ersetzen, das dennoch das dynamische Verhalten und die wesentliche Eigenschaften des ursprünglichen Modells enthält. Anhand eines Beispiels aus der Werkzeugmaschinenindustrie werden hier zwei Reduktionsmethoden präsentiert.

Abstract

The development of increasingly complex structures requires advanced simulation techniques for design, optimization and control. Models resulting from the Finite-Element-Method (FEM) are yet computationally too expensive to be used for coupled simulation. The integration of appropriate FEM-based model reduction methods for generating accurate low-order dynamic models may become a major breakthrough for the simulation and optimization of machine-tools. These methods provide an efficient computational prototyping tool to replace a complex model with a smaller one, which is still capable of capturing the dynamical behaviour and preserving the essential properties of the original model.

1. Einführung in die Ordnungsreduktion

Unter dem Begriff „Ordnungsreduktion“ werden halbautomatische Methoden verstanden, um Differentialgleichungssysteme mit vielen Freiheitsgraden durch Verhaltensmodelle zu approximieren, also durch Differentialgleichungssysteme mit deutlich weniger Freiheitsgraden zu ersetzen.

Das Ziel ist also, ein Gleichungssystem von Dimension N in ein deutlich kleineres System mit M Freiheitsgraden ($M \ll N$) mit Hilfe einer Transformationsmatrix umzusetzen. Das reduzierte System soll die relevanten statischen und dynamische Eigenschaften des ursprünglichen Systems beinhalten:

$$M\ddot{U}_N + D\dot{U}_N + KU_N = F$$

$$U_N = TU_m \implies M_m\ddot{U}_m + D_m\dot{U}_m + K_mU_m = F_m$$

2. Methoden zur Modellreduktion von linearen Systemen

Matrixkondensationstechnik (Substrukturtechnik)

Das Guyan-Verfahren beschreibt eine Kondensation der Systemmatrizen, welche auf einem sukzessiven Eliminieren von Zeilen und Spalten basiert. Die Methode beruht auf der Auswahl von „wichtigen“ FE-Knoten, die physikalisch im reduzierten Modell beinhaltet werden müssen: typischerweise sind dies Knoten an denen Kräfte/Momente angebracht werden, oder wo Verschiebungen/Rotationen für den Output erforderlich sind oder wo grosse Massen/Trägheiten auftreten.

Zur statischen Kondensation des stationären Problems $Kx = F$, besteht der erste Schritt daraus, die Freiheitsgrade der Steifigkeitsmatrix neu anzuordnen, so dass sie in Slave- (s) und Master- (m) Freiheitsgrade aufgetrennt sind:

$$\begin{bmatrix} K_{ss} & K_{sm} \\ K_{ms} & K_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_m \end{bmatrix}$$

Wenn man davon ausgeht, dass die auf den Slave-Knoten (s) wirkenden Kräfte null sind, kann die Gleichung für x_s gelöst werden, was zu der Transformationsmatrix T führt zu:

$$K_{ss}x_s + K_{sm}x_m = 0 \rightarrow x_s = -K_{ss}^{-1}K_{sm}x_m \Rightarrow x = \begin{bmatrix} x_s \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_{ss}^{-1}K_{sm} \\ I \end{bmatrix} x_m = Tx_m \rightarrow KTx_m = F$$

Zur dynamischen Kondensation werden die ungedämpften Bewegungsgleichungen betrachtet: $M\ddot{x} + Kx = F$. Man unterscheidet wieder zwischen Verschiebungen x_s , die reduziert werden müssen und Verschiebungen x_m , die gelöst werden müssen:

$$\begin{bmatrix} M_{ss} & M_{sm} \\ M_{ms} & M_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_s \\ \ddot{x}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{ss} & K_{sm} \\ K_{ms} & K_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_s \\ F_m \end{bmatrix}$$

Mit einem analogen Verfahren wie bei der statischen Kondensation und mittels der statischen Approximation $x_s = -K_{ss}^{-1}K_{sm}x_m$, kann das Problem neu formuliert werden, was wieder zur gleichen Transformationsmatrix T führt:

$$MT\ddot{x}_m + KTx_m = F \quad \text{mit} \quad T = \begin{bmatrix} -K_{ss}^{-1}K_{sm} \\ I \end{bmatrix}$$

Methoden aus der Regelungstechnik

Ein stabiles State-Space System kann in der folgenden Form formuliert werden:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= C^T x(t) \end{aligned} \quad \text{mit} \quad \left\| \begin{array}{l} x(t) \in \mathfrak{R}^n \\ u(t) \in \mathfrak{R}^m \\ y(t) \in \mathfrak{R}^p \end{array} \right. \quad \text{und} \quad \left\| \begin{array}{l} A \in \mathfrak{R}^{n \times n} \\ B \in \mathfrak{R}^{n \times m} \\ C \in \mathfrak{R}^{n \times p} \end{array} \right.$$

Zwei wichtige Eigenschaften eines solchen Systems, Regelbarkeit und Beobachtbarkeit, dienen als theoretische Basis für die verschiedenen regelungstheoriebasierten Reduktionsmethoden. Sie werden mit Hilfe der *Grammians* P und Q beschrieben, die folgendermassen definiert sind:

$$P = \int_0^{\infty} e^{At} B B^T e^{A^T t} dt \quad \text{und} \quad Q = \int_0^{\infty} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt$$

Wenn P und Q Matrizen full-rank sind und wenn alle Eigenwerte von A negative Realteile haben, dann können beide Grammians als eindeutige und positiv-definite Lösungen der Ljapunov Gleichungen berechnet werden: $AP + PA^T = -BB^T$ & $A^T Q + QA = -C^T C$

Krylov-basierte Modellreduktion

Gegeben ist wieder ein Gleichungssystem erster Ordnung:

$$A\dot{x}(t) = x(t) + Bu(t) \rightarrow sAX(s) = X(s) + BU(s)$$

$$y(t) = C^T x(t) \rightarrow Y(s) = C^T X(s)$$

Die Übertragungsfunktion kann wie folgt formuliert werden: $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C^T (I - sA)^{-1} B$

Die Taylor-Reihenentwicklung von G(s) um $s_0 = 0$ ist gegeben als:

$$G(s) = -C^T (I + sA + s^2 A^2 + \dots) B = \sum_0^{\infty} m_i s^i, \text{ mit } m_i = -C^T A^i B \text{ als die Momente um } s_0.$$

Die *Krylov subspace* Methoden bestehen darin, eine Funktion

$$G_r(s) = \frac{P_{r-1}(s)}{Q_r(s)} = \frac{a_{r-1}s^{r-1} + \dots + a_1s + a_0}{b_r s^r + b_{r-1}s^{r-1} + \dots + b_1s + 1}$$

als *Padé Approximant* von G(s) zu wählen, deren Reihenentwicklung um s_0 die Reihenentwicklung von G(s) für die erste 2r Momente abstimmt: $G(s) = G_r(s) + O(s^{2r})$

mit $\lim_{s \rightarrow s_0} O(s^{2r}) = 0$. Der numerisch stabiler Weg, die Momente zu berechnen, erfordert die Bestimmung der sogenannten Krylov Subspaces, wo die Vektoren v_i and w_i die entsprechenden stabilen Basisvektoren darstellen:

- *r-th right Krylov Subspace*: $K_r^R \{A, B\} = \text{span}(v_1, v_2, \dots, v_r)$
- *r-th left Krylov Subspace*: $K_r^L \{A^T, C\} = \text{span}(w_1, w_2, \dots, w_r)$

Es gibt zwei Hauptansätze, die Basismatrizen V_r und W_r für die Krylov Subspaces zu erstellen: Den Lanczos-Algorithmus und das Arnoldi-Verfahren. Der Lanczos Algorithmus liefert eine genauere Approximation, ist numerisch effizienter und garantiert Invarianzerhaltung des Systems. Das Arnoldi-Verfahren wird aber in meisten Fällen

bevorzugt, weil es numerische Stabilität garantiert, die Stabilitäts- und Passivitätseigenschaften des ursprünglichen Systems unverändert lässt und ermöglicht, eine komplette Output-Approximation zu erhalten.

Nachfolgend werden zwei Reduktionsalgorithmen näher untersucht und deren Effizienz anhand von Ergebnissen an einem Beispiel überprüft. Gegenüber den anderen oben beschriebenen Methoden, scheinen die „Krylov Methoden“ bezüglich rechnerischer Effizienz am geeignetsten zu sein [4]. Die „*Component Mode Synthesis*“ hat sich aber in den letzten Jahren, dank Integration in kommerzieller FE-Software, ebenfalls durchgesetzt. Sie vereint die Vorteile der modalen Superposition - die ähnlich wie die Krylov Methoden auf einer Orthogonalprojektion der Systemmatrizen basieren - und des Guyan-Verfahrens.

3. Component Mode Synthesis

Die *Component Mode Synthesis* (CMS) ist eine Kombination von Substrukturtechnik und modaler Superposition. Die Struktur wird in beliebig viele Komponenten aufgeteilt, die separat berechnet werden. Die einzelnen Ergebnisse werden dann kombiniert, um als Resultat das Verhalten der gesamten Struktur zu erhalten. Die DOF's der Struktur werden in „Rand“-Knoten u_m (Master) und „interne“ Knoten u_s (Slave) unterschieden. Die Verlagerungen der internen Knoten u_s haben zwei Beiträge: Die aus der *statischen Kondensation* mit den Randfreiheitsgraden als Master-Knoten und die aus der internen *modalen Superposition* mit den gesperrten Randfreiheitsgraden.

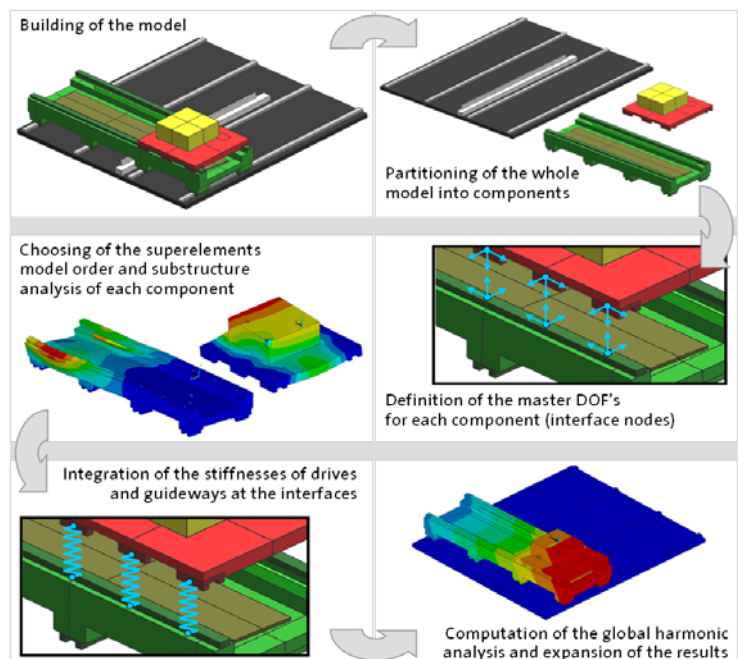


Bild 1: Verlauf einer reduzierten Simulation mit CMS

Diese zwei Beiträge u_m und u_s führen zu einem so genannten „*Superelement*“ für jede Komponente der Struktur: $\{ u_s \} = \varphi_R^T \{ u_m \} + \varphi_s^T \{ q \}$, wobei φ_r die „Starrkörpermoden“ und φ_s die „elastischen“ Moden mit fester Einspannung der Randknoten darstellen.

4. MOR for ANSYS

Der Algorithmus *MOR for ANSYS* basiert auf den Krylov-Subspace Methoden, die im Abschnitt 3 beschrieben wurden. Die Systemmatrizen (M, K, D und die Input und Output Matrizen) werden aus Ansys exportiert und mit dem Arnoldi-Verfahren reduziert. Aus Ansys lässt sich ein *.full* File des Gleichungssystems schreiben, das in Kombination mit einem *output.txt* File (mit der Definition der Knoten, die für die Auswertung notwendig sind) zu den reduzierten Matrizen führt. Diese Matrizen reduzierter Ordnung lassen sich dann in Matlab/Simulink bearbeiten um beliebige dynamische Simulationen durchzuführen.

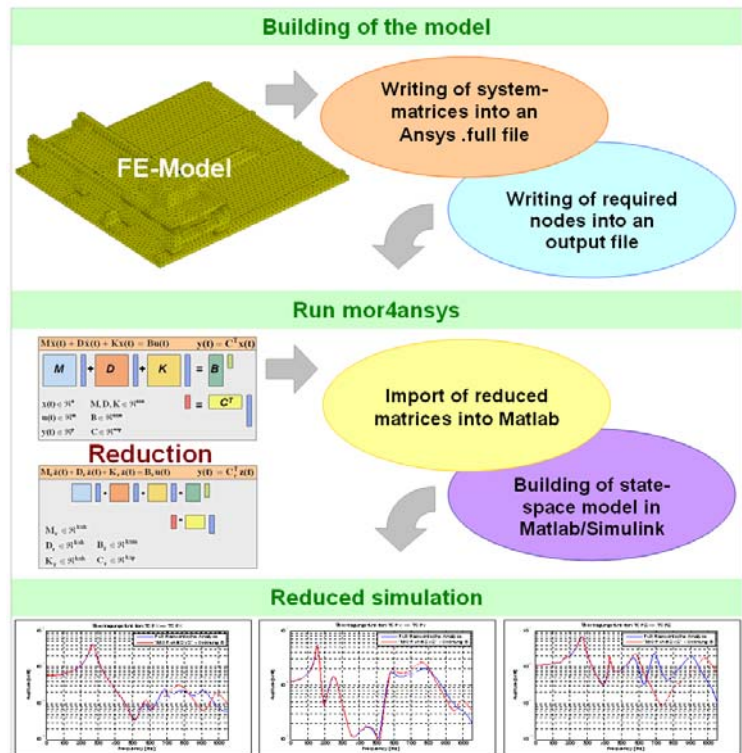


Bild 2: Verlauf einer reduzierten Simulation mit MOR for ANSYS

5. Anwendungsbeispiel: 2D-Positioniersystem

Die CMS Methode und der Algorithmus *MOR for ANSYS* wurden an einem 2D-Positioniersystem angewendet um die Effizienz beider Techniken zu überprüfen. Das Ziel der Simulation war die Auswertung der Frequenzantwort am TCP (Tool Center Point) auf dem oberen Schlitten (siehe Bild 3).

In den Graphiken im Bild 4 werden die Ergebnisse als Amplituden- und Phasengänge der Übertragungsfunktionen am TCP für die X-, Y- und Z-Richtung gezeigt. Die Resultate der beiden reduzierten harmonischen Analysen für die Modelle reduzierter Ordnung 16 werden in den Graphiken mit dem Ansys „Full“ Methode überlagert und zeigen eine sehr gute Übereinstimmung.

Gemäss den sechs Abbildungen, in denen die Amplitude und die Phase dargestellt sind, wird das dynamische Verhalten des vollständigen Systems sowohl mit MOR for ANSYS als mit CMS in einem Frequenzbereich von 0 bis 1000Hz gut nachgebildet.

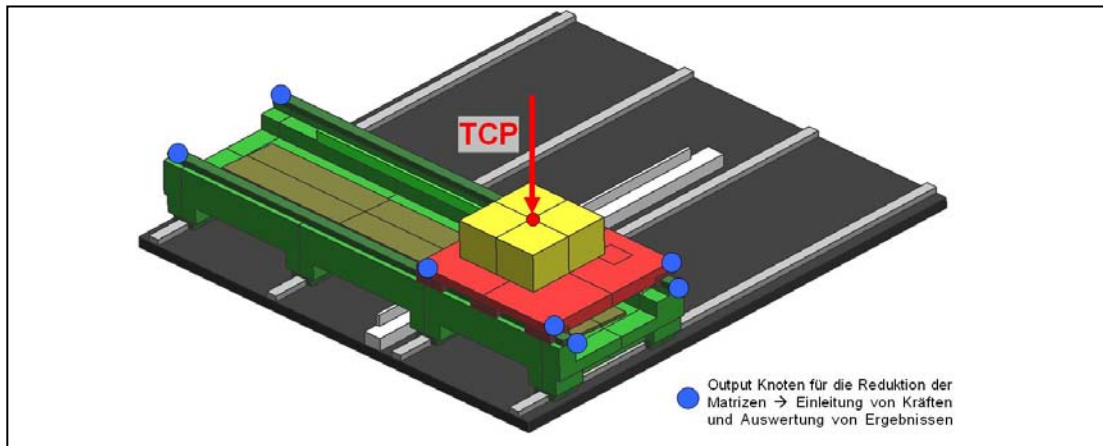


Bild 3: 2D-Positioniersystem

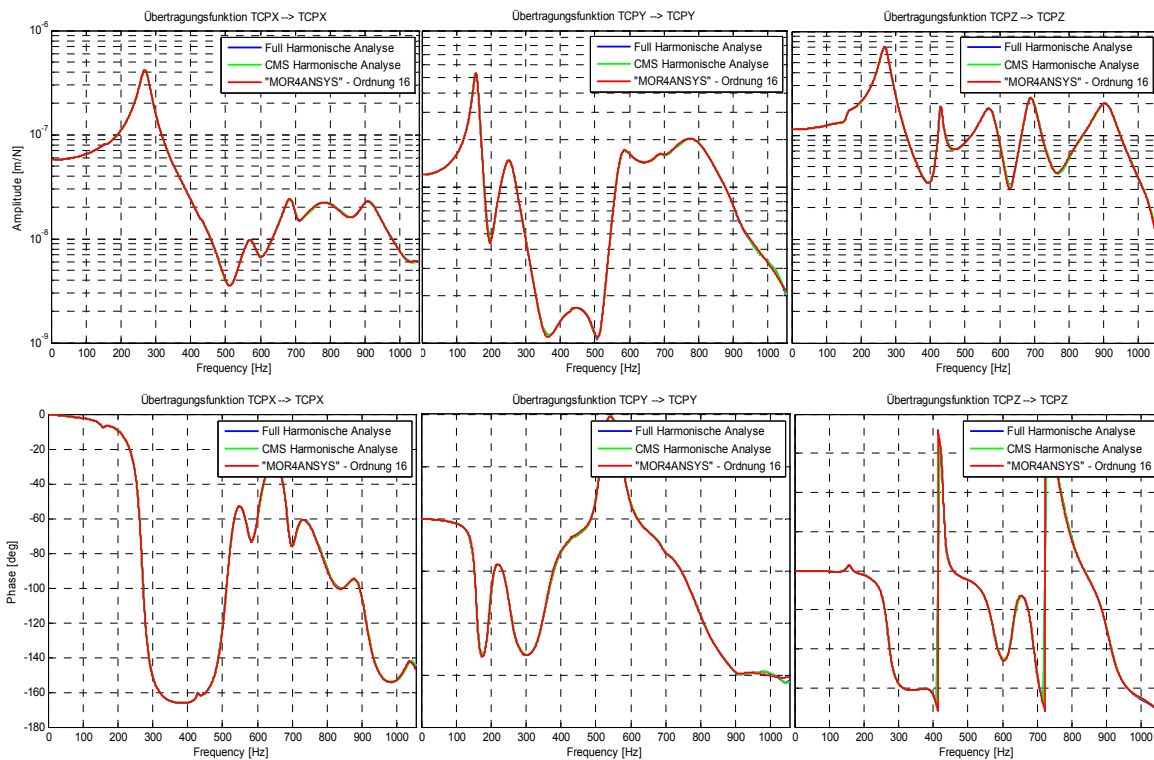


Bild 4: Amplituden- und Phasen- Vergleich zwischen der Ansys „Full“ Methode, der Ansys CMS Analyse und dem MOR for ANSYS Modell

6. Hybride Modelle

Im Gesamtaufbau einer Werkzeugmaschine sind oft wenige Bauteile so kritisch, dass sie eine detaillierte FE-Beschreibung benötigen. Diese Bauteile sind jedoch wichtig, weil sie für das globale dynamische Verhalten der ganzen Struktur entscheidend sind. Die Möglichkeit, FE-Teilmodelle in eine Mehrkörper Umgebung zu integrieren, bietet eine gute Voraussage von gesamthaften Maschineneigenschaften und erlaubt die Berücksichtigung von geregelten Achsbewegungen bei vergleichsweise geringem Aufwand [1] [2] [5] [6].

Aus der Ansys-Workbench Umgebung können die Komponenten einer Struktur je nach Bedarf als FE-Matrizen oder als Starrkörper exportiert werden. Im folgenden Beispiel, in dem eine einfache Spindel dargestellt ist, können die Festlager-Bereiche als starre Körper betrachtet werden, während die Welle als flexibler Körper exportiert werden muss, um ein realitätsnahes Modell zu erstellen.

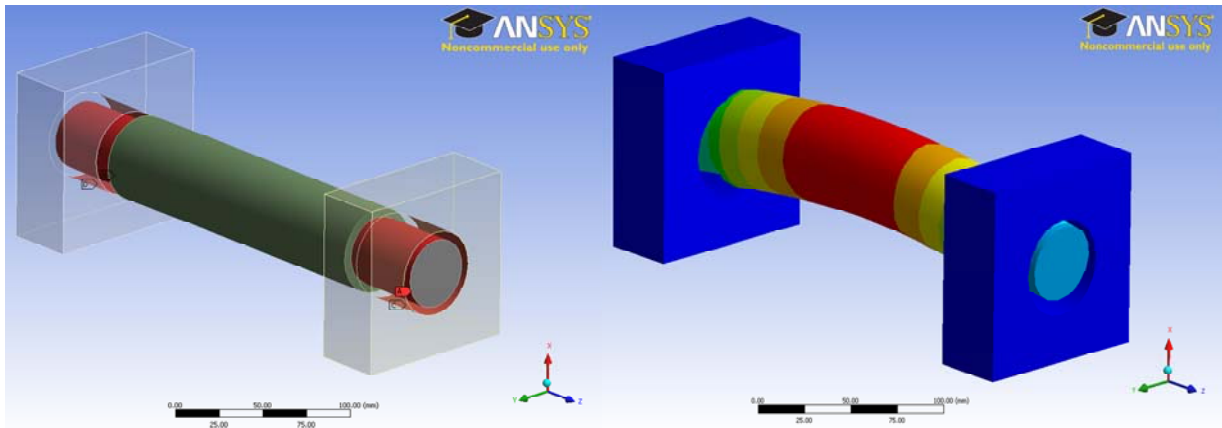
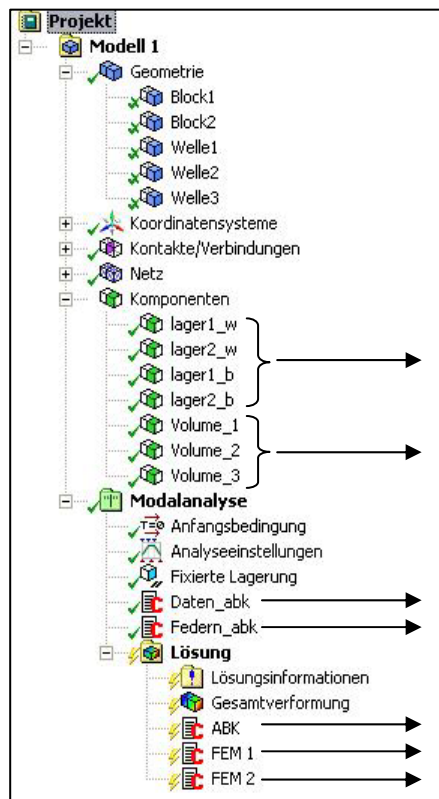


Bild 5: Spindel Modell in Ansys Workbench und entsprechende Modalanalyse

Mit der Definition von Komponenten und dem Einfügen von Befehl-Skripten wird die Beschreibung des Modells in zwei Text-Files gespeichert, eines mit den mechanischen



Eigenschaften der Körper und eines mit den Informationen über den Koppelstellen zwischen den Körpern [3]. Dazu müssen für jeden flexiblen Körper die Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrizen in Form von einem Full-File exportiert werden (siehe Bild 6).

Definition der Koppelstellen-Komponenten

Definition der Körper-Komponenten

Initialisierung der Steifigkeits- und Dämpfungswerte
Schreiben des Files mit Detaillierung der Koppelstellen

Schreiben des Files mit Detaillierung der starren Körper
Schreiben der Systemmatrizen für die einzelnen FE-Körper
Schreiben der Output-Knoten für die einzelnen FE-Körper

Bild 6: Erstellung und Exportierung des Modells

In Matlab/Simulink kann dann das gesamte Modell als beliebige Kombination von starren und flexiblen Körpern neu zusammgebaut werden. Die verschiedene Teilmodelle werden in der Zustandsraum-Form verwendet und durch die Definition der Koppelmatrix verbunden.

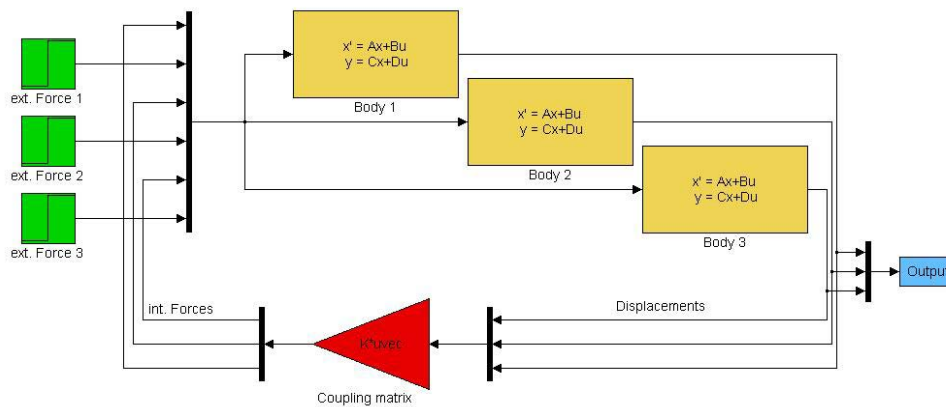


Bild 7: Zusammenbau der starren und flexiblen Körper in Matlab/Simulink

7. Fazit

Die Integration von Modellordnungsreduktion könnte zu einem Durchbruch für die Simulation bei dem Entwurf einer neuen Werkzeugmaschine führen, indem sie die Kombination von strukturdynamischen Analysen und Auslegung von modellbasierten Regelungsalgorithmen ermöglichen. Mit dem 2D-Positioniersystem wurde gezeigt, wie effizient Reduktionsverfahren bei der Nachbildung einer Struktur mit wenigen Freiheitsgraden sein können. Anhand einer idealisierten Spindel wurde erläutert, wie ein aufwändiges Ansys-Modell nach Matlab-Simulink exportiert und simuliert werden kann.

- [1] O. Zirn, R. Montavon. Gekoppelte Simulation von FE- und Mehrkörpermodellen für Werkzeugmaschinen. In ASIM, 2008.
- [2] A. Dehbi, W. Wondrak, E. B. Rudnyi, U. Killat, P. van Duijsen. Efficient Electrothermal Simulation of Power Electronics for Hybrid Electric Vehicle. EuroSimE, 2008.
- [3] T. Lorenzer, S. Weikert, S. Bossoni, K. Wegener. Modeling and Evaluation Tool for Supporting Decisions on the Design of Reconfigurable Machine Tools. Journal of Manufacturing Systems, 26(3-4):167-177, 2007.
- [4] T. Bechtold. Model Order Reduction of Electro-Thermal MEMS. Diss. TU Freiburg im Breisgau, 2005.
- [5] J. Berkemer. Gekoppelte Simulation von Maschinendynamik und Antriebsregelung unter Verwendung linearer Finite-Elemente-Methode. Diss. TU Stuttgart, 2003.
- [6] P. De Fonseca, D. Vandepitte, H. Van Brussel, P. Sas. Dynamic Model Reduction of a Flexible Three-axis Milling Machine. In ISMA, Leuven, 1998.